مقارنة مقدرات بيز مع مقدر الأمكان الأعظم في تقدير دالة البقاء للتوزيع الطبيعي اللوغاريتمي باستخدام بيانات مراقبة من النوع الثاني

تهاني مهدي عباس* ، سميرة مزهر حميد* و قتيبة نبيل نايف***
* Instructor of Statistics, College of Science, University of Baghdad.
** Instructor of Statistics, College of Fine Art Computer Center, University of Baghdad.
*** Instructor of Statistics, Department of Statistics, University of Baghdad

المستخلص :

يهدف هذا البحث الى مقارنة مقدرات بيز والمتمثلة بمقدر بيز بالأعتماد على دالة لا معلوماتية مسبقة ومقدر بيز بالأعتماد على دالة معلوماتية مرافقة مسبقة ، مع مقدر الأمكان الأعظم لدالة البقاء للتوزيع الطبيعي اللوغاريتمي وبالأعتماد على بيانات مراقبة من النوع الثاني وتمت المقارنة بالأعتماد على اسلوب المحاكاة.

1- مقدمة : Introduction

أن للتوزيع الطبيعي اللوغاريتمي أهمية كبيرة في دراسة دالة البقاء وخاصة للمرضى المصابين بمرض السرطان والذين يخضعون لجرعات من العلاج الكيميائي، أضافة لذلك له أهمية في موضوع الرقابة على جودة الأنتاج وكذلك يدخل في الدراسة المتعلقة بعلم الحشرات والكيمياء الحياتية [1]، لذلك في هذا البحث سوف يتم التطرق الى طرائق تقدير دالة البقاء لهذا التوزيع ولبيانات مراقبة من النوع الثاني، إذ سيتم إستخدام طريقة الامكان الأعظم في التقدير لما تتصف به هذه الطريقة من خاصية الثبات وكذلك سيتم الأعتماد على اسلوب بيز في تقدير دالة البقاء من خلال توظيف المعلومات الأولية والمتمثلة بالدالة غير المعلوماتية المسبقة (Non informative prior) والدالة المرفقة الطبيعية المسبقة (Conjugate prior)، وسيتم المقارنة بين الطرائق بأستخدام اسلوب المحاكاة .

2- التوزيع الطبيعي اللوغاريتمي [5]
Log – Normal Distribution

إذا كان المتغير العشوائي $y \sim N(\mu, \sigma^2)$ وأن $t = e^y$ عندئذ يقال أن المتغير العشوائي t ذو توزيع طبيعي لوغاريتمي بالمعلمتين μ, σ^2 وكما يلي:

$$t = e^y \Rightarrow y = \ln t \; ; \; dy = \frac{dt}{t} \; , \; t > 0$$

إذن:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right)^2\right\} \frac{dt}{t} = 1$$

وهذا يعني أن دالة الكثافة الأحتمالية للمتغير t تكون حسب الصيغة التالية :

$$f\left(t;\mu,\sigma^2\right) = \frac{1}{t\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}; t > 0 \;\cdots\; (1)$$

حيث أن $-\infty < \mu < \infty \; , \; \sigma^2 > 0$ وبالرموز فأن $t \sim \log N\left(\mu \, , \, \sigma^2\right)$.

إما الدالة التجميعية Cumulative Distribution Function للتوزيع الطبيعي اللوغاريتمي تكون حسب الصيغة التالية :

$$\begin{aligned} F(t) &= p(T \le t) = p(\ln T \le \ln t) \\ &= p(Y \le \ln t) \; ; \; y \sim N\left(\mu, \sigma^2\right) \\ &= p\left(\frac{Y-\mu}{\sigma} \le \frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right) \\ &= p\left(Z \le \frac{\ln t-\mu}{\sigma}\right); \; Z \sim N(0,1) \end{aligned}$$

$$F(t) = p(T \le t) = \phi\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right) \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (2)$$

حيث أن $\phi(.)$ تعني الدالة التوزيعية للتوزيع الطبيعي المعياري Standard Normal Distribution وهذا يعني أنه بالأمكان أستخدام جداول التوزيع الطبيعي المعياري في حساب التراكم الأحتمالي للتوزيع الطبيعي اللوغاريتمي.

كذلك فأن العزم من من المرتبة r حول نقطة الأصل للتوزيع الطبيعي اللوغاريتمي يكون حسب الصيغة التالية :

$$\mu'_r = \exp\left(\mu_r + \frac{1}{2} r^2 \sigma^2\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

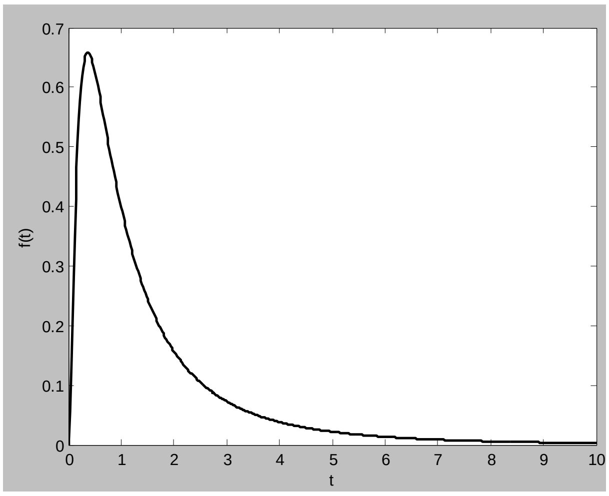
وكذلك فان الوسيط Median لهذا التوزيع هو:

$$F(t) = \frac{1}{2} \Rightarrow \phi\left(\frac{\ln t_{Med} - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\because \phi(0) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{\ln t_{med} - \mu}{\sigma} = 0 \Rightarrow \ln t_{Med} = \mu$$

$$\therefore t_{Med} = e^{\mu} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$



شكل رقم (1)

مخطط دالة التوزيع الطبيعي اللوغاريتمي.

وبما أن هدف البحث هو دراسة سلوك دالة البقاء $S(t)$ للتوزيع الطبيعي اللوغاريتمي وخاصة لبيانات المراقبة من النوع الثاني، لذلك سوف نوضح بعض المفاهيم المتعلقة بهذا التوزيع وخاصة لدالة البقاء $S(t)$.

i- دالة البقاء $S(t)$ Survival Function:

$$\because S(t) = \Pr(T > t) = 1 - F(t) = 1 - \phi\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right) \ldots (5)$$

$$\therefore \phi\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right) = 1 - S(t)$$

$$\frac{\ln t - \mu}{\sigma} = Z_{(1 - S(t))}$$

$$\Rightarrow \ln t = \mu + \sigma Z_{(F(t))}$$

$$\therefore t = \exp\left(\mu + \sigma Z_{(F(t))}\right)$$

ii- دالة المخاطرة $h(t)$ Failure Function:

في التوزيع الطبيعي اللوغاريتمي من الصعوبة تحديد صيغة كاملة لدالة المخاطرة $h(t)$ ولكن يمكن تحديد صيغة تقريبية لها وكما يلي [5] :

$$\because h(t) = \frac{f(t)}{S(t)}$$

$$\therefore h(t) = \frac{\dfrac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma t} \exp\left\{-\dfrac{(\ln t - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}}{1 - \displaystyle\int_0^t \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma u} \exp\left\{-\frac{(\ln u - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} du} \quad \ldots..(6)$$

iii- بيانات المراقبة من النوع الثاني[4]:

Type II Censoring Data

يستخدم هذا النوع من البيانات بصورة رئيسة في الحالات السريرية ، وتكون الفكرة هنا هو أختيار r من الوحدات بحيث أن $r < n$ ، n تمثل حجم العينة قيد الدراسة، وأن دالة الأمكان لهذا النوع من البيانات المرتبة تصاعدياً تكون حسب الصيغة التالية:

$$L\left(\mu\ ,\ \sigma^2 / \underline{t}\right) = \frac{n!}{(n-r)!}\left[\prod_{i=1}^{r} f(t_i)\right]\left[1 - F(t_r)\right]^{n-r} \ldots (7)$$

وبالنسبة للتوزيع الطبيعي اللوغاريتمي تصبح الصيغة (7) كما يلي :

$$L\left(\mu, \sigma^2 / \underline{t}\right) = \frac{n!}{(n-r)!}\left[(2\pi)^{-\frac{r}{2}} \sigma^{-r} \left(\prod_{i=1}^{r} t_i^{-1}\right) \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{r}(\ln t_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}\right] \times \left(1 - \phi\left(\frac{\ln t_r - \mu}{\sigma}\right)\right)^{n-r}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

3-طرائق تقدير دالة البقاء للتوزيع الطبيعي اللوغاريتمي [3],[2]:

بصورة عامة سيتم تقدير المعالم $\mu\ ,\ \sigma^2$ في الصيغة (8) ومن ثم تعوض هذه المعالم المقدرة في دالة البقاء $S(t)$، وأن الطرائق المستخدمة هي:

أولاً : طريقة الأمكان الأعظم [3]

Maximum Likelihood Method

تعتمد هذه الطريقة على دالة الأمكان ، والتي تعرف على أنها دالة الكثافة الأحتمالية المشتركة The joint Probability Density Function للعينة

العشوائية $t_1, t_2, \ldots, t_n$ وعلية فأن هذه الطريقة تعتمد على أختيار قيم المعالم التي تجعل دالة الأمكان أعظم ما يمكن، وللبيانات المراقبة من النوع الثاني ولـ r من المشاهدات فأن تقدير معالم التوزيع الطبيعي اللوغاريتمي μ , σ^2 ، يكون كما يلي :

بأخذ اللوغاريتم الطبيعي للصيغة (8) :

$$\ln L\left(t_1, t_2, \ldots, t_r; \mu, \sigma^2\right) = \ln\left(\frac{n!}{(n-r)!}\right) - \frac{r}{2}\left(\ln 2\pi + \ln\sigma^2\right) + \sum_{i=1}^{r}\ln t_i^{-1} - \frac{\sum_{i=1}^{r}(\ln t_i - \mu)^2}{2\sigma^2} + (n-r)\ln\left(1-\phi\left(\frac{\ln t_r - \mu}{\sigma^2}\right)\right) \quad \ldots\ldots (9)$$

نلاحظ أن الصيغة (9) صعبة الأشتقاق وخاصة عند أيجاد المشتقة الجزئية بالنسبة للمعلمة μ وبالنسبة للمعلمة σ^2 وذلك لوجود الحد $\phi\left(\frac{\ln t_r - \mu}{\sigma}\right)$ ، لذلك سيتم أقتراح أن وبما أن $t_r = t_{Med}$:

$$\phi\left(\frac{\ln t_{Med} - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{2}$$

إذاً فأن الصيغة (9) سوف تكون كما يلي :

$$\ln L\left(t_1, t_2, \ldots, t_r; \mu, \sigma^2\right) = \ln\left(\frac{n!}{(n-r)!}\right) - \frac{r}{2}\left(\ln 2\pi + \ln\sigma^2\right) + \sum_{i=1}^{r}\ln t_i^{-1} - \frac{\sum_{i=1}^{r}(\ln t_i - \mu)^2}{2\sigma^2} + (n-r)\ln\frac{1}{2} \quad \ldots\ldots (10)$$

بإيجاد المشتقة الجزئية لكل من μ , σ^2 يتم الحصول على المعادلتين التاليتين :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \ln L\left(t_1, t_2, \ldots, t_r; \mu, \sigma^2\right)}{\partial\mu} &= 0 \\ \frac{\partial \ln L\left(t_1, t_2, \ldots, t_r; \mu, \sigma^2\right)}{\partial\sigma^2} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{when } \sigma^2 = \hat{\sigma}^2, \mu = \hat{\mu}$$

وبحل المعادلتين أعلاه يتم الحصول على تقدير μ , σ^2 وكما يلي :

$$\hat{\mu}_{ML} = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\ln t_i \quad \ldots\ldots (11)$$

$$\hat{\sigma}^2_{ML} = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\left(\ln t_i - \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\ln t_i\right)^2 \quad \ldots\ldots (12)$$

وعلية فان تقدير دالة البقاء $S(t)$ بالأعتماد على مقدر الأمكان الأعظم حسب الصيغة التالية:

$$\hat{S}_{ML}(t) = 1 - \phi\left(\frac{\ln t - \hat{\mu}_{ML}}{\hat{\sigma}_{ML}}\right) \quad \ldots\ldots (13)$$

ثانياً : أسلوب بيز في التقدير [2]:
Bayesian procedure in Estimation

تستند فكرة تقدير بيز على أفتراض أن المعلمة متغير عشوائي وان هناك معلومات سابقة حول هذه المعلمه يتم دمجها مع معلومات العينة الحالية والمتمثلة بدالة الأمكان للحصول على التوزيع اللاحق وحسب الصيغة التالية :

$$f\left(\mu, \sigma^2 / t_1, \ldots, t_r\right) \propto f\left(\mu, \sigma^2\right) L\left(t_1, \ldots, t_r; \mu, \sigma^2\right) \quad \ldots\ldots (14)$$

حيث أن $f\left(\mu, \sigma^2\right)$ تمثل دالة المعلومات الأولية ، وهناك أنواع مختلفة لدالة المعلومات الأولية وحسب المعلومات المتوفره حول المعلمة، وبعد أن تم تحديد دالة التوزيع اللاحق يتم تحديد دالة الخسارة والتي تكون على أنواع مختلفة [2] وفي هذا البحث سوف يتم استخدام دالة خسارة تربيعية والتي تكون حسب الصيغة التالية ولكل من المعالم μ , σ^2 :

$$\left.\begin{aligned} L(\hat{\mu}, \mu) &= (\hat{\mu} - \mu)^2 \\ L\left(\hat{\sigma}^2, \sigma^2\right) &= \left(\hat{\sigma}^2 - \sigma^2\right)^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (15)$$

وبعد تحديد دالة الخسارة يتم أيجاد التوقع لهذه الدالة حيث يطلق على الدالة الناتجة بدالة المخاطرة ولكل من المعلمة μ و المعلمة σ^2 ستكون الصيغه لهما كما يلي :

$$E\left[L(\hat{\mu}, \mu)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} L(\hat{\mu} - \mu) f(\mu / t_1, t_2, \ldots, t_r)\, d\mu \quad \ldots\ldots (16)$$

$$E\left[L\left(\hat{\sigma}^2, \sigma^2\right)\right] = \int_{0}^{\infty} L\left(\hat{\sigma}^2 - \sigma^2\right) f\left(\sigma^2 / t_1, \ldots, t_r\right) d\sigma^2 \quad \ldots\ldots (17)$$

وأن الدالة الحدية اللاحقة $f(\mu / t_1, t_2, \ldots, t_r)$ في الصيغة (16) يتم الحصول عليها من تكامل الصيغة (14)

بالنسبة للمعلمة σ^2 وكذلك الدالة الحدية اللاحقة $f\left(\sigma^2/t_1,t_2,\ldots,t_r\right)$ في الصيغة (17) يتم الحصول عليها من تكامل الصيغة (14) بالنسبة للمعلمة μ ، وعلية فأن مقدر بيز للمعالم μ , σ^2 هو $\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}^2$ الذي يجعل الصيغة (17) والصيغة (16) أقل ما يمكن ، وبصورة أخرى ، فأن مقدر بيز للمعالم μ , σ^2 ماهو الا التوقع الشرطي للدالة الحدية $f\left(\sigma^2/t_1,t_2,\ldots,t_r\right)$ و التوقع الشرطي للدالة الحدية $f\left(\mu/t_1,t_2,\ldots,t_r\right)$ على التوالي.

في هذا البحث سوف نتطرق الى نوعين من الدوال المسبقة التي سوف يتم أستخدامهما في تقدير المعالم μ , σ^2 في الصيغة (8) وكما يلي :

i – مقدر بيز لدالة البقاء S(t) بالأعتماد على دالة لامعلوماتية مسبقة: Noninformative prior

على فرض أن:

$$f\left(\mu,\sigma^2\right) \propto \frac{1}{\sigma^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

دالة لا معلوماتية مشتركة مسبقة للمعالم μ , σ^2 وكما اقترحها الباحث Jeffrey [2] ، وبعد دمج الصيغة (18) مع دالة الأمكان للمشاهدات يتم الحصول على الدالة اللاحقة المشتركة وكما يلي :

$$f\left(\mu,\sigma^2/t_1,t_2,\ldots,t_r\right) \propto \sigma^{-(r+1)} \exp\left[-\frac{\sum_{i=1}^{r}\left(\ln t_i-\mu\right)^2}{2\sigma^2}\right] \times$$

$$\left(1-\phi\left(\frac{\ln t_r-\mu}{\sigma}\right)\right)^{n-r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

وبنفس الأسلوب المعتمد في أولاً لطريقة الأمكان الأعظم في التقدير يتم الحصول على ما يلي :

$$f\left(\mu,\sigma^2/t_1,\ldots,t_r\right) \propto \sigma^{-(r+1)} \exp\left[-\frac{\sum_{i=1}^{r}\left(\ln t_i-\mu\right)^2}{2\sigma^2}\right]$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

وبتبسيط الصيغة (20) نحصل على ما يلي :

$$f\left(\mu,\sigma^2/t_1,t_2,\ldots,t_r\right) \propto \sigma^{-(r+1)}$$

$$\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left\{(r-1)s^2+r\left(\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\ln t_i-\mu\right)^2\right\}\right]$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

حيث أن :

$$s^2=\frac{1}{r-1}\sum_{i=1}^{r}\left(\ln t_i-\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\ln t_i\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

وللحصول على الدالة اللاحقة الحدية للمعلمة μ ، يتم أجراء التكامل على الصيغة (21) بالنسبة للمعلمة σ^2 وكما يلي :

$$f\left(\mu/t_1,t_2,\ldots,t_r\right) \propto \int_{0}^{\infty} f\left(\mu,\sigma^2/t_1,t_2,\ldots,t_i\right)d\sigma^2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

على فرض أن $z=\frac{A}{2\sigma^2}$ وأن :

$$A=(r-1)s^2+r\left(\mu-\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\ln t_i\right)^2$$

$$\therefore f\left(\mu/t_1,t_2,\ldots,t_r\right) \propto A^{-\frac{r}{2}}\int_{0}^{\infty} z^{\frac{(r-1)}{2}}\exp(-z)dz$$

$$\propto \left[(r-1)s^2+r\left(\mu-\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\ln t_i\right)^2\right]^{-\frac{r}{2}}$$

$$\propto \left[1+\frac{r\left(\mu-\bar{t}\right)}{(r-1)s^2}\right]^{-\frac{r}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

وأن الصيغة (24) ما هي الا توزيع (t-distribution) $t_{(r-1)}$ بالمعالم $\left(\bar{t}\ ,\ s^2/r\right)$ وعلية وبالأعتماد على الصيغة (16) فان المتوسط الشرطي لهذا التوزيع هو :

$$E\left(\mu/t_1,\ldots,t_r\right)=\hat{\mu}_{B1}=\bar{t}=\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\ln t_i \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

وللحصول على الدالة اللاحقة الحدية للمعلمة σ^2 يتم أجراء التكامل على الصيغة (21) بالنسبة للمعلمة μ وكما يلي :

$$f\left(\sigma^2/t_1,t_2,\ldots,t_r\right) \propto \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\sigma^2/t_1,t_2,\ldots,t_r\right)d\mu$$

$$\propto \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^{-r-2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left[(r-1)s^2 + r\left(\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\ln t_i - \mu\right)^2\right]\right) d\mu$$

$$\propto \sigma^{-r-2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(r-1)s^2\right)\sqrt{2\pi\sigma^2 / r}$$

$$\propto \left(\sigma^2\right)^{-(r+1)/2} \exp\left(\frac{(r-1)s^2}{2\sigma^2}\right) \quad \text{................ (26)}$$

وأن الصيغة (26) هي معكوس χ^2 المقياس scale inverse chi – square .

$$\therefore \left(\sigma^2 / t_1, t_2, ..., t_r\right) \sim \text{Inv} - \chi^2\left(r-1, s^2\right)$$

وبالأعتماد على الصيغة (17) فان المتوسط الشرطي لهذا التوزيع هو :

$$E\left(\sigma^2 / t_1, t_2, ..., t_r\right) = \hat{\sigma}^2_{B1} = \frac{r-1}{r-3} s^2 \quad \text{......... (27)}$$

وعلية فان تقدير دالة البقاء $S(t)$ بالأعتماد على مقدر بيز وبالأعتماد على دالة لا معلوماتية يكون حسب الصيغة التالية:

$$\hat{S}_{B1}(t) = 1 - \phi\left(\frac{\ln t - \hat{\mu}_{B1}}{\hat{\sigma}_{B1}}\right) \quad \text{....................... (28)}$$

ii – مقدر بيز لدالة البقاء $S(t)$ بالأعتماد على دالةمرافقة مسبقة: Conjugate Prior

على فرض ان المعلمة μ تمتلك دالة مرافقة طبيعية مسبقة [2] :

$$\left(\mu / \sigma^2\right) \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{k_0}\right) \quad \text{............................. (29)}$$

وأن المعلمة σ^2 تمتلك دالة مرافقة مسبقة [2] :

$$\sigma^2 \sim \text{Inv} - \chi^2\left(\nu_0, \sigma_0^2\right) \quad \text{............................. (30)}$$

وبدمج الصيغتين (29) و (30) يتم الحصول على دالة مرفقة مشتركة مسبقة للمعالم μ , σ^2 وكما يلي :

$$f\left(\mu, \sigma^2\right) \propto \sigma^{-1}\left(\sigma^2\right)^{-\left(\frac{\nu_0}{2}+1\right)}$$
$$\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\nu_0\sigma_0^2 + k_0\left(\mu_0 - \mu\right)^2\right]\right) \quad \text{......... (31)}$$

وأن الصيغة (31) هي توزيع طبيعي – معكوس مربع كاي بالمعالم الزائدة hyper parameters $\left(\mu_0, \sigma_0^2, k_0, \nu_0\right)$ التي تحسب من المعلومات الأولية أي أن :

$$\left(\mu, \sigma^2\right) \sim N - \text{Inv} - \chi^2\left(\mu_0, \sigma_0^2 / k_0; \nu_0, \sigma_0^2\right)$$
$$\text{.. (32)}$$

وبدمج الصيغة (32) مع دالة الأمكان للمشاهدات يتم الحصول على الدالة اللاحقة المشتركة وكما يلي :

$$f\left(\mu, \sigma^2 / t_1, t_2, ..., t_r\right) \propto \sigma^{-1}\left(\sigma^2\right)^{-\left(\frac{\nu_0}{2}+1\right)}$$
$$\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\nu_0\sigma_0^2 + k_0\left(\mu_0 - \mu\right)^2\right]\right) \times$$
$$\left(\sigma^2\right)^{-r/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left[(r-1)s^2 + r\left(\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\ln t_i - \mu\right)^2\right]\right) \times$$
$$\left(1 - \phi\left(\frac{\ln t_r - \mu}{\sigma}\right)\right)^{n-r} \quad \text{................................ (33)}$$

وبنفس الأسلوب المعتمد في ثانياً في الفقره (i) للدالة لا معلوماتية مسبقة في التقدير يتم الحصول على ما يلي :

$$f\left(\mu, \sigma^2 / t_1, t_2, ..., t_r\right) \propto \sigma^{-1}\left(\sigma^2\right)^{-\left(\frac{\nu_0}{2}+1\right)}$$
$$\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\nu_0\sigma_0^2 + k_0\left(\mu_0 - \mu\right)^2\right]\right) \times$$
$$\left(\sigma^2\right)^{-r/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left[(r-1)s^2 + r\left(\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\ln t_i - \mu\right)^2\right]\right)$$
$$\text{.. (34)}$$

وعلية فأن :

$$\left(\mu, \sigma^2 / t_1, t_2, ..., t_r\right) \sim N - \text{Inv} -$$
$$\chi^2\left(\mu_n, \sigma_n^2 / k_n; \nu_n, \sigma_n^2\right) \quad \text{.............. (35)}$$

وأن :

$$\mu_n = \frac{k_0}{k_0 + r}\mu_0 + \frac{r}{k_0 + r} \cdot \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\ln t_i \quad \text{........... (36)}$$

حيث أن :

$$k_n = k_0 + r$$
$$\nu_n = \nu_0 + r$$

وكذلك فأن :

$$\nu_n\sigma_n^2 = \nu_0\sigma_0^2 + (r-1)s^2 + \frac{k_0 r}{k_0 + r}\left(\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\ln t_i - \mu_0\right)^2$$
.... (37)

وللحصول على الدالة للاحقة الحدية للمعلمة μ ، يتم أجراء التكامل على الصيغة (34) بالنسبة للمعلمة σ^2 وكما يلي :

$$f(\mu / t_1, t_2, ..., t_r) \propto \int_0^{\infty} f(\mu, \sigma^2 / t_1, t_2, ..., t_i) d\sigma^2$$

$$\propto \left[1 + \frac{k_n(\mu - \mu_n)^2}{\nu_n \sigma_n^2}\right]^{-(\nu_n+1)/2} \quad .... \quad (38)$$

وأن الصيغة (38) ما هي الا توزيع (t-distribution) t_{ν_n} بالمعالم $(\mu_n \ , \ \sigma_n^2 / k_n)$ وعلية وبالأعتماد على الصيغة (16) فان المتوسط الشرطي لهذا التوزيع هو :

$$E(\mu / t_1, t_2, ..., t_r) = \hat{\mu}_{B2} = \mu_n \quad .... \quad (39)$$

وللحصول على الدالة اللاحقة الحدية للمعلمة σ^2 يتم أجراء التكامل على الصيغة (34) بالنسبة للمعلمة μ وكما يلي :

$$f(\sigma^2 / t_1, t_2, ..., t_r) \propto \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma^2 / t_1, t_2, ..., t_r) d\mu$$

$$\propto (\sigma_n^2)^{-\left(\frac{\nu_n}{2}+1\right)} \exp\left(-\frac{\nu_n s^2}{2\sigma_n^2}\right) \quad .... \quad (40)$$

وأن الصيغة (40) هي معكوس χ^2 المقيس scale inverse chi – square .

$$\therefore (\sigma^2 / t_1, t_2, ..., t_r) \sim \text{Inv} - \chi^2(\nu_n \ , \ \sigma_n^2)$$

وبالأعتماد على الصيغة (17) فان المتوسط الشرطي لهذا التوزيع هو :

$$E(\sigma^2 / t_1, t_2, ..., t_r) = \hat{\sigma}_{B2} = \frac{\nu_n}{\nu_n - 2}\ \sigma_n^2 \quad .... \quad (41)$$

وعلية فان تقدير دالة البقاء $S(t)$ بالأعتماد على مقدر بيز وبالأعتماد على دالة مرفقة مسبقة يكون حسب الصيغة التالية:

$$\hat{S}_{B2}(t) = 1 - \phi\left(\frac{\ln t - \hat{\mu}_{B2}}{\hat{\sigma}_{B2}}\right) \quad .... \quad (42)$$

4- المحاكاة : Simulation

لغرض معرفة كفاءة طرائق التقدير لدالة البقاء للتوزيع الطبيعي اللوغاريتمي لبيانات مراقبة من النوع الثاني تم محاكاة تقدير دالة البقاء ودراسة تأثير تغير حجوم العينات ونسب المراقبة على هذه المقدرات إذ تم محاكاة احجام العينة $(n = 25 \ , \ 50 \ , \ 100)$ ونسب مراقبة $(r = 30\% \ , \ 40\% \ , \ 50\%)$ وتم استخدام مقياس متوسط مربعات الخطأ MSE للمقارنة بين طرائق التقدير ولكل t_i من الزمن وحسب الصيغة التالية :

$$MSE(\hat{S}(t)) = \frac{1}{R}\sum_{i=1}^{R}(\hat{S}_i(t) - S(t))^2 \quad .... \quad (43)$$

حيث R تمثل عدد تكرار التجربة .

وبما أن MSE يحسب لكل t_i ، فأن متوسط مربعات الخطأ التكاملي IMSE يمثل بمثابة تكامل للمساحة الكلية لـ t_i وأختزالها بقيمة واحدة تعتبر عامة للزمن ، أو معبرة عن الزمن الكلي وحسب الصيغة التالية :

$$IMSE(\hat{S}(t)) = \frac{1}{R}\sum_{i=1}^{R}\left[\frac{1}{n_t}\sum_{j=1}^{n_t}(\hat{S}_i(t_j) - S(t_j))^2\right]$$
.... (44)

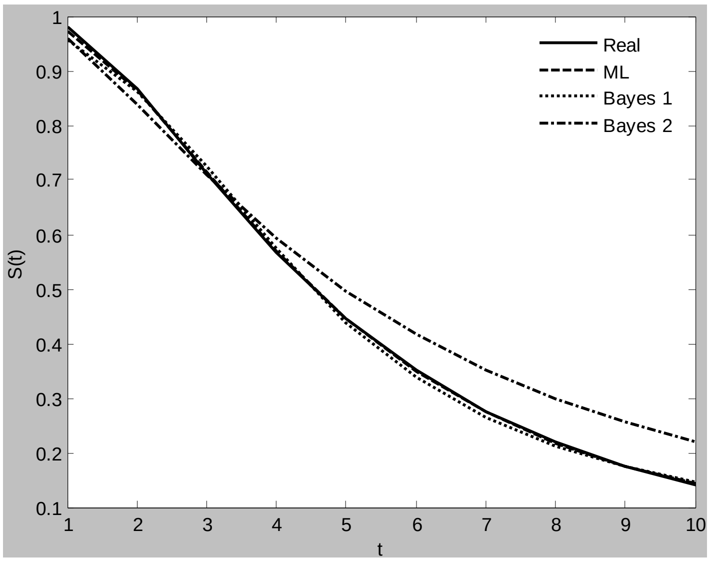
حيث أن n_t هي معبرة عن حدود المتغير t_i أي من الحد الأدنى الى الحد الأعلى .

وقد تم تكرار كل تجربة $R = 1000$ مرة. والجداول الأتية تمثل تقدير دالة البقاء $S(t)$ بأستخدام مقدر الأمكان الأعظم ML ومقدر بيز بالأعتماد على دالة لا معلوماتية مسبقة Bayes1 ومقدر بيز بالأعتماد على دالة مرافقة مسبقة Bayes2 ، اضافة لحساب MSE لهذه المقدرات و لكل فترة زمنية وحساب IMSE للمساحة الكلية للفترة الزمنية، ولجميع نسب المراقبة وحجوم العينات.

جدول رقم (1)

يوضح مقدرات S(t) وMSE و IMSE لها لجميع طرائق التقدير عند $n = 25$ & $r = 30\%$

t	S(t)				MSE		
	Real	ML	Bayes1	Bayes2	ML	Bayes1	Bayes2
10	0.98033	0.97182	0.95746	0.95927	0.0012719	0.0041675	0.00059002
20	0.86757	0.86435	0.86151	0.83925	0.0089269	0.0132110	0.00138930
30	0.71288	0.71559	0.72534	0.70848	0.0181730	0.0243740	0.00081370
40	0.56724	0.56867	0.57421	0.59258	0.0228190	0.0297210	0.00145560
50	0.44629	0.44484	0.43934	0.49591	0.0233600	0.0311760	0.00323060
60	0.35057	0.34792	0.33808	0.41682	0.0213420	0.0285070	0.00509640
70	0.27623	0.27413	0.26506	0.35237	0.0181690	0.0243080	0.00644350
80	0.2188	0.21828	0.21229	0.29972	0.0149080	0.0200240	0.00713670
90	0.1744	0.17586	0.17396	0.25650	0.0120360	0.0166300	0.00727560
100	0.13993	0.14335	0.14537	0.22081	0.0096639	0.0139490	0.00702550
IMSE					0.0150670	0.0206070	0.00404570

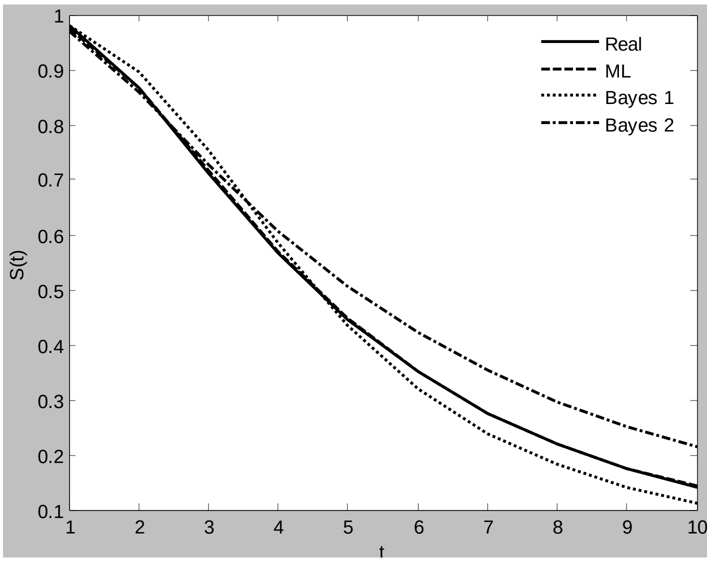


شكل رقم (2): يوضح مقدرات دالة البقاء S(t) لجميع طرائق التقدير عند حجم عينة $n = 25$ & $r = 30\%$.

جدول رقم (2)

يوضح مقدرات S(t) وMSE و IMSE لها لجميع طرائق التقدير عند $n = 50$ & $r = 30\%$.

t	S(t)				MSE		
	Real	ML	Bayes1	Bayes2	ML	Bayes1	Bayes2
10	0.98033	0.97559	0.97937	0.96895	0.00057982	0.0010710	0.00026008
20	0.86757	0.86744	0.89732	0.85866	0.00438390	0.0076138	0.00077051
30	0.71288	0.71672	0.75382	0.72782	0.00840340	0.0152740	0.00123020
40	0.56724	0.57040	0.58585	0.60745	0.01018400	0.0170750	0.00265780
50	0.44629	0.44751	0.43502	0.50538	0.01032900	0.0172290	0.00446280
60	0.35057	0.35062	0.31990	0.42135	0.00963700	0.0169250	0.00589160
70	0.27623	0.27619	0.23858	0.35286	0.00853380	0.0154420	0.00666940
80	0.21880	0.21942	0.18178	0.29709	0.00728110	0.0129800	0.00685110
90	0.17440	0.17603	0.14150	0.25157	0.00605570	0.0104370	0.00660670
100	0.13993	0.14264	0.11234	0.21424	0.00495660	0.0082365	0.00610730
IMSE					0.00703450	0.0122280	0.00415070

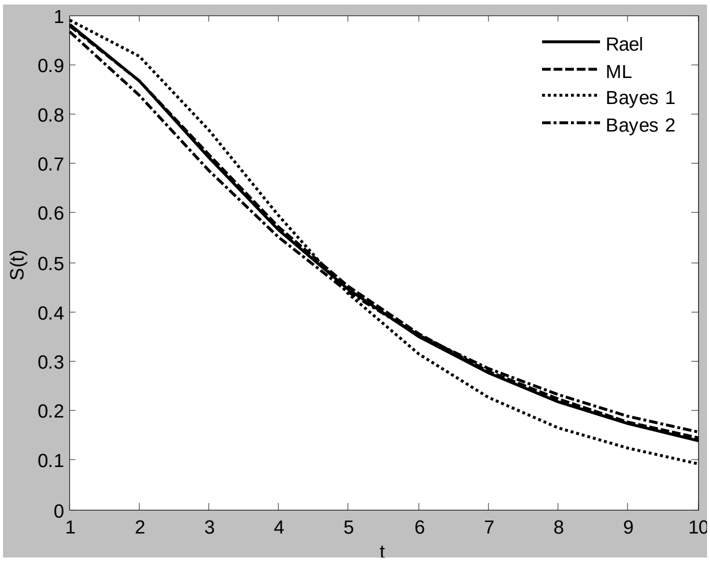


شكل رقم (3): يوضح مقدرات دالة البقاء S(t) لجميع طرائق التقدير عند حجم عينة n = 50 & r = 30%.

جدول رقم (3)

يوضح مقدرات S(t) وMSE و IMSE لها لجميع طرائق التقدير عند n = 100 & r = 30%.

t	S(t)				MSE		
	Real	ML	Bayes1	Bayes2	ML	Bayes1	Bayes2
10	0.98033	0.97781	0.98987	0.96685	0.00026593	0.00031848	0.00030462
20	0.86757	0.86824	0.91583	0.83791	0.00256210	0.00575460	0.00163550
30	0.71288	0.71716	0.76848	0.68568	0.00493820	0.01162900	0.00193560
40	0.56724	0.57236	0.59417	0.55022	0.00584680	0.01117800	0.00164520
50	0.44629	0.45094	0.43720	0.43993	0.00577260	0.01024400	0.00140970
60	0.35057	0.35459	0.31554	0.35284	0.00525350	0.01045600	0.00130910
70	0.27623	0.27984	0.22788	0.28469	0.00456680	0.01018400	0.00126490
80	0.21880	0.22225	0.16638	0.23135	0.00385240	0.00903030	0.00121770
90	0.17440	0.17785	0.12333	0.18939	0.00318380	0.00744960	0.00114670
100	0.13993	0.14347	0.09293	0.15618	0.00259520	0.00586860	0.00105320
IMSE					0.00388370	0.00821120	0.0012922

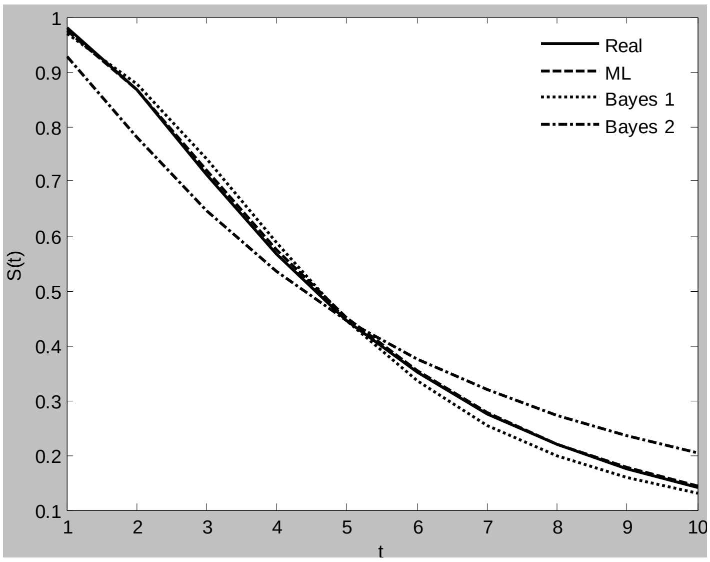


شكل رقم (4): يوضح مقدرات دالة البقاء S(t) لجميع طرائق التقدير عند حجم عينة n = 100 & r = 30%.

جدول رقم (4)

يوضح مقدرات S(t) وMSE و IMSE لها لجميع طرائق التقدير عند n = 25 & r = 40%.

t	S(t)				MSE		
	Real	ML	Bayes1	Bayes2	ML	Bayes1	Bayes2
10	0.98033	0.97396	0.96854	0.92788	0.00089159	0.0023253	0.00292330
20	0.86757	0.86800	0.87884	0.78069	0.00691210	0.0103050	0.00801510
30	0.71288	0.72096	0.74200	0.64507	0.01423300	0.0210100	0.00519640
40	0.56724	0.57570	0.58764	0.53435	0.01748400	0.0265150	0.00173250
50	0.44629	0.45184	0.44607	0.44610	0.01713300	0.0251330	0.00066876
60	0.35057	0.35353	0.33477	0.37577	0.01530400	0.0224960	0.00130010
70	0.27623	0.27803	0.25500	0.31930	0.01311500	0.0193100	0.00250060
80	0.21880	0.22071	0.19915	0.27354	0.01097800	0.0163140	0.00361070
90	0.17440	0.17715	0.15948	0.23609	0.00905430	0.0135280	0.00438260
100	0.13993	0.14381	0.13047	0.20516	0.00740490	0.0111500	0.00479050
IMSE					0.01125100	0.0168090	0.00351200

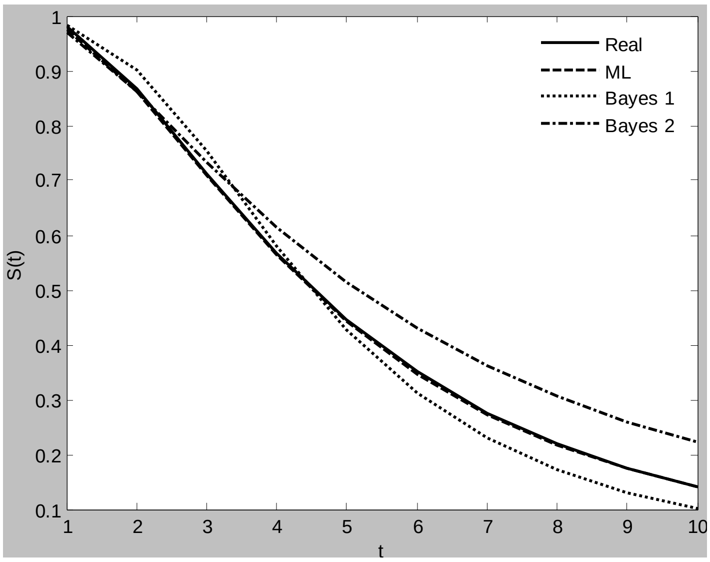


شكل رقم (5): يوضح مقدرات دالة البقاء S(t) لجميع طرائق التقدير عند حجم عينة n = 25 & r = 40%.

جدول رقم (5)

يوضح مقدرات S(t) وMSE و IMSE لها لجميع طرائق التقدير عند n = 50 & r = 40%.

t	S(t)				MSE		
	Real	ML	Bayes1	Bayes2	ML	Bayes1	Bayes2
10	0.98033	0.97524	0.98388	0.96920	0.00046947	0.00061096	0.00027790
20	0.86757	0.86291	0.90151	0.86149	0.00369530	0.00652320	0.00085349
30	0.71288	0.71004	0.75287	0.73356	0.00678310	0.01293500	0.00162030
40	0.56724	0.56421	0.58087	0.61526	0.00798160	0.01385000	0.00351710
50	0.44629	0.44271	0.42848	0.51437	0.00791910	0.01379200	0.00572540
60	0.35057	0.34703	0.31221	0.43085	0.00723400	0.01364200	0.00739180
70	0.27623	0.27336	0.22929	0.36240	0.00628900	0.01260000	0.00824750
80	0.21880	0.21697	0.17121	0.30640	0.00529220	0.01072400	0.00839190
90	0.17440	0.17373	0.13028	0.26048	0.00435890	0.00862370	0.00804080
100	0.13993	0.14037	0.10099	0.22265	0.00354220	0.00671290	0.00740050
IMSE					0.00535650	0.01000100	0.00514670

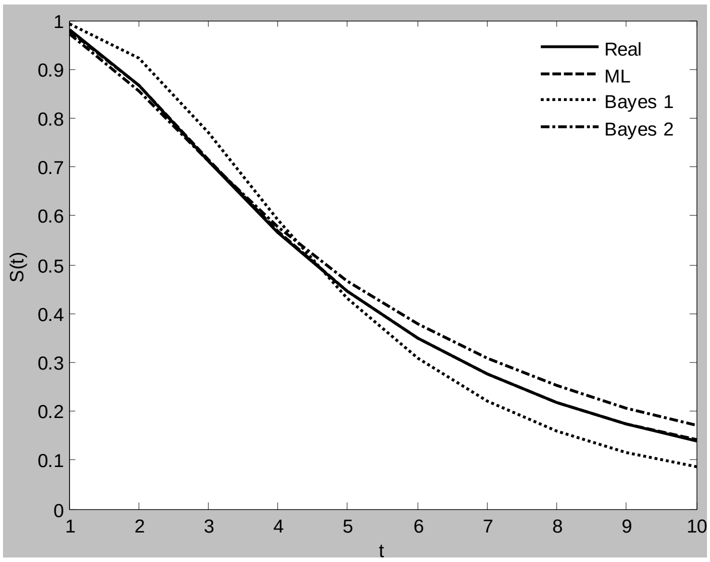


شكل رقم (6): يوضح مقدرات دالة البقاء S(t) لجميع طرائق التقدير عند حجم عينة n = 50 & r = 40%.

جدول رقم (6)

يوضح مقدرات S(t) وMSE و IMSE لها لجميع طرائق التقدير عند n = 100 & r = 40%.

t	S(t)				MSE		
	Real	ML	Bayes1	Bayes2	ML	Bayes1	Bayes2
10	0.98033	0.97860	0.992330	0.97223	0.00019369	0.00026560	0.00017289
20	0.86757	0.86793	0.921490	0.85581	0.00187280	0.00542450	0.00087066
30	0.71288	0.71492	0.770690	0.71133	0.00346980	0.00968840	0.00116560
40	0.56724	0.56900	0.591030	0.57846	0.00403210	0.00792100	0.00139200
50	0.44629	0.44719	0.430670	0.46767	0.00398940	0.00736470	0.00167970
60	0.35057	0.35085	0.307540	0.37858	0.00366920	0.00855710	0.00191170
70	0.27623	0.27627	0.219440	0.30786	0.00322160	0.00900600	0.00201310
80	0.21880	0.21891	0.157970	0.25183	0.00273410	0.00827680	0.00198440
90	0.17440	0.17474	0.115200	0.20733	0.00226340	0.00694120	0.00186100
100	0.13993	0.14057	0.085224	0.17182	0.00184130	0.00550490	0.00168320
IMSE					0.00272870	0.00689500	0.00147340

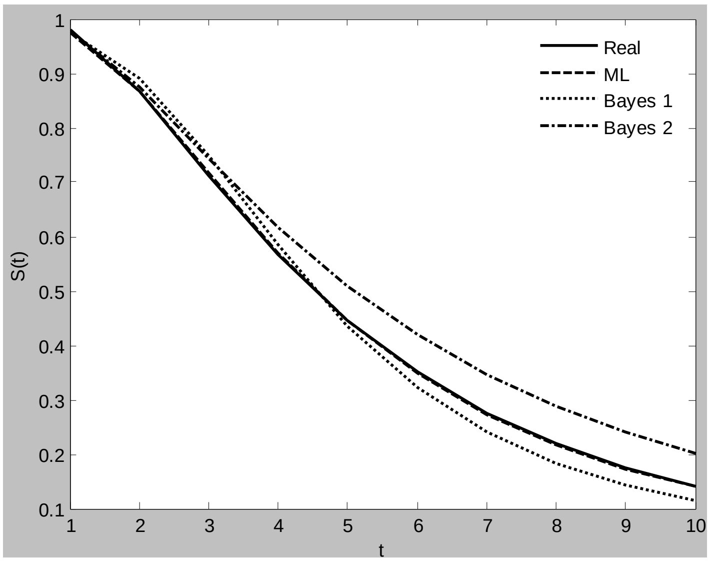


شكل رقم (7): يوضح مقدرات دالة البقاء S(t) لجميع طرائق التقدير عند حجم عينة n = 100 & r = 40%.

جدول رقم (7)

يوضح مقدرات S(t) وMSE و IMSE لها لجميع طرائق التقدير عند n = 25 & r = 50%.

t	S(t)				MSE		
	Real	ML	Bayes1	Bayes2	ML	Bayes1	Bayes2
10	0.98033	0.97448	0.97566	0.97639	0.00070811	0.00138930	0.00012846
20	0.86757	0.86611	0.88975	0.87453	0.00543470	0.00858450	0.00080685
30	0.71288	0.71591	0.74818	0.74259	0.01052200	0.01766600	0.00205260
40	0.56724	0.56934	0.58436	0.61669	0.01258400	0.02071400	0.00364000
50	0.44629	0.44578	0.43588	0.50839	0.01235700	0.02004800	0.00493220
60	0.35057	0.34825	0.32127	0.41897	0.01112100	0.01847300	0.00562050
70	0.27623	0.27343	0.23962	0.34633	0.00957090	0.01620000	0.00574200
80	0.21880	0.21653	0.18269	0.2876	0.00802510	0.01367000	0.00546770
90	0.17440	0.17321	0.14269	0.24011	0.00662520	0.01121400	0.00497040
100	0.13993	0.14003	0.11398	0.20157	0.00542240	0.00905820	0.00437960
IMSE					0.00823700	0.01370200	0.0037740

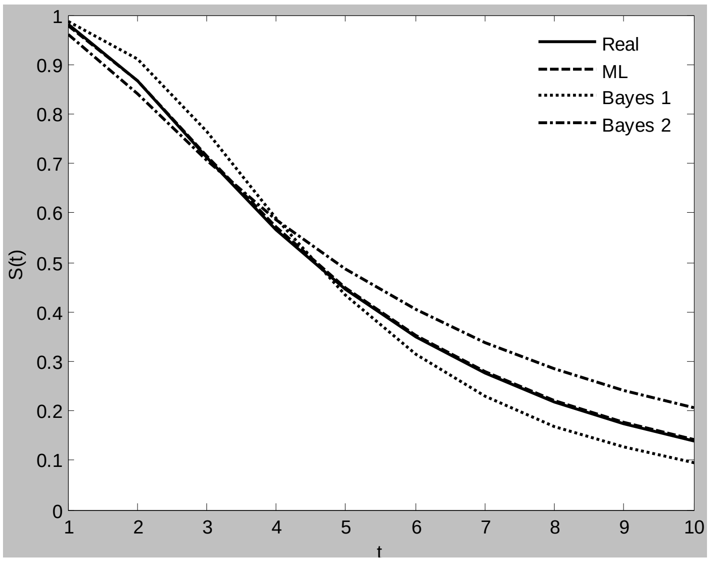


شكل رقم (8): يوضح مقدرات دالة البقاء S(t) لجميع طرائق التقدير عند حجم عينة n = 25 & r = 50%.

جدول رقم (8)

يوضح مقدرات S(t) وMSE و IMSE لها لجميع طرائق التقدير عند n = 50 & r = 50%

t	S(t)				MSE		
	Real	ML	Bayes1	Bayes2	ML	Bayes1	Bayes2
10	0.98033	0.97703	0.987760	0.96125	0.00033465	0.00039624	0.00052870
20	0.86757	0.86695	0.910920	0.84011	0.00299100	0.00603710	0.00152230
30	0.71288	0.71552	0.763670	0.70540	0.00567360	0.01226700	0.00114960
40	0.56724	0.57040	0.590480	0.58553	0.00670220	0.01236700	0.00147430
50	0.44629	0.44884	0.435080	0.48581	0.00661750	0.01167000	0.00263890
60	0.35057	0.35258	0.315040	0.40468	0.00602770	0.01167900	0.00391150
70	0.27623	0.27806	0.228830	0.33902	0.00525080	0.01118600	0.00483110
80	0.21880	0.22079	0.168510	0.28579	0.00444370	0.00982490	0.00528610
90	0.17440	0.17673	0.126280	0.24245	0.00368720	0.00805320	0.00534450
100	0.13993	0.14266	0.096359	0.20694	0.00301900	0.00632300	0.00512590
IMSE					0.00447470	0.00898030	0.00318130

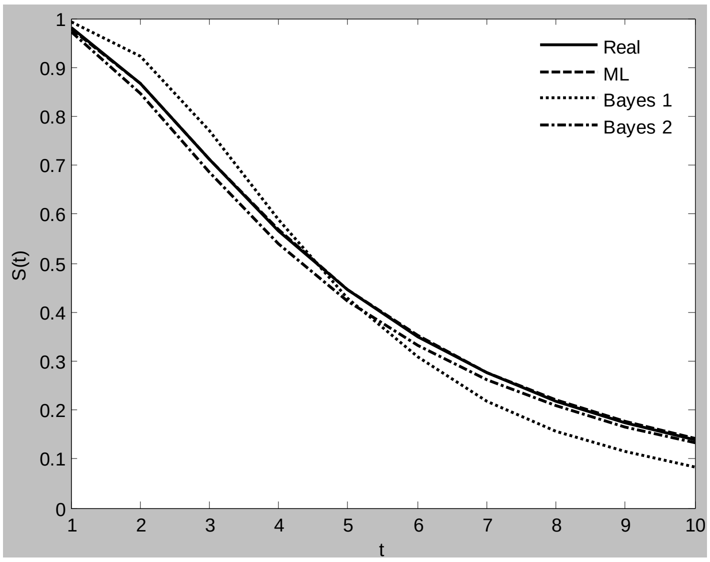


شكل رقم (9): يوضح مقدرات دالة البقاء S(t) لجميع طرائق التقدير عند حجم عينة n = 50 & r = 50%.

جدول رقم (9)

يوضح مقدرات S(t) وMSE و IMSE لها لجميع طرائق التقدير عند n = 100 & r = 50%.

t	S(t)				MSE		
	Real	ML	Bayes1	Bayes2	ML	Bayes1	Bayes2
10	0.98033	0.97849	0.992930	0.97276	0.00016261	0.00026339	0.00014558
20	0.86757	0.86663	0.922690	0.84549	0.00149970	0.00512330	0.00114510
30	0.71288	0.71323	0.769750	0.68519	0.00282200	0.00831180	0.00190500
40	0.56724	0.56787	0.589270	0.54051	0.00339350	0.00665300	0.00209400
50	0.44629	0.44687	0.429700	0.42331	0.00344040	0.00654250	0.00197680
60	0.35057	0.35118	0.307180	0.33204	0.00320360	0.00779500	0.00174060
70	0.27623	0.27703	0.219090	0.26187	0.00283160	0.00839650	0.00147550
80	0.21880	0.21989	0.157410	0.20802	0.00241660	0.00790440	0.00122220
90	0.17440	0.17580	0.114460	0.16652	0.00201310	0.00675770	0.00099753
100	0.13993	0.14162	0.084393	0.13435	0.00164950	0.00543240	0.00080658
IMSE					0.00234330	0.00631800	0.00135090



شكل رقم (10): يوضح مقدرات دالة البقاء S(t) لجميع طرائق التقدير عند حجم عينة n = 100 & r = 50%.

5- تفسير النتائج Explanation Results :

يتضح من النتائج في الجداول (1) الى (9) المذكورة انفاً ما يلي :

- أن تقدير دالة البقاء S(t) بطريقة ML كانت أكثر تقارب من القيم الحقيقية لدالة البقاء S(t) عن باقي الطرائق ولجميع حجوم العينات ونسب المراقبة.
- مقدر Bayes 2 لدالة البقاء S(t) كان له أقل MSE مقارنة بباقي المقدرات ولجميع حجوم العينات ونسب المراقبة.
- أشارت النتائج إلى تناقص MSE و IMSE لجميع المقدرات عند زيادة حجوم العينات ونسب المراقبة.
- عند زيادة حجم العينة نلاحظ أن مقدر Bayes 2 لدالة البقاء(S(t يقترب من القيم الحقيقة لدالة البقاء S(t) عكس مقدر Bayes 1 الذي لم يطرأ علية أي تحسن لجميع نسب المراقبة وحجوم العينات بالنسبة لباقي المقدرات.
- كان مقدر Bayes 2 لدالة البقاء S(t) أكثر كفاءة في التقدير من باقي المقدرات وخاصة لحجوم العينة الصغيرة25= n ولجميع نسب المراقبة.

6- الأستنتاجات Conclusion :

يلاحظ من النتائج المذكورة في المبحث السابق أفضلية مقدر Bayes 2 لدالة البقاء S(t) ولجميع نسب المراقبة وحجوم العينات من المقدرات الأخرى ويرجع ذلك الى توضيف المعلومات الأولية، بصورة أخرى، أن المعلومات الأولية زادت من وفرة المعلومات حول المعلمة المراد تقديرها .لذا يوصي الباحثون بأستخدام مقدر Bayes 2 لتقدير دالة البقاء S(t) للتوزيع الطبيعي اللوغاريتمي وخاصة لحجوم العينات الصغيرة ونسب المراقبة الصغيرة ايضاً.

7- المصادر Reference :

[1] أميرحناهرمز، "*الإحصاء الرياضي*"دار الكتب للطباعة والنشر،جامعة الموصل. 1990.

[2] G. Andrew; B.C. John; S.S. Hal; D.B. Rubin, "*Bayesian Data Analysis*" 2ed ed. London: Chapman and Hall, 2004.

[3] A. L., James"*Estimators for Type-I1 Censored (Log) Normal Samples*" IEEE Transactions on Reliabiliyy, vol.40, No. 5, 1991.

[4] A. E. Luis; Q. M. William, "*Statistical Prediction Based on Censored Life Data*" http://citeseer.ist.psu.edu/261928.html, 1999.

[5] S.K. Sinha, "*Reliability and life testing*" New York: John Wiley & Sons, Inc., 1986.

Abstract:

In this paper we will compare Bayes estimators, representing by Bayes estimator depending on Non-informative prior distribution and conjugate prior distribution, with ML estimator for survival function for Log-Normal distribution under Type II censoring data by using the simulation.