استخدام المقدر المقلص في تقدير معلمة الشكل لتوزيع ويبل

ضوية سلمان حسين، سميرة خليل إبراهيم و بيداء اسماعيل عبد الوهاب
قسم الإحصاء، كلية ألادارة والاقتصاد، جامعة بغداد.

الخلاصة

يتناول البحث تقدير معلمة الشكل β لعينات الفشل المبتورة من توزيع ويبل ذي المعلمتين، في حالة وجود تخمين أولي لمجال يحتوي على المعلمة β.

لذا سنتطرق الى مقدرين للمعلمة β: الاول تقدير خطي والثاني المقدر المقلص والمقارنة بينهما من خلال أصغر متوسط مربعات خطأ ممكن و مقياس للكفاءة النسبية للمقدر، أما مقدر القياس θ يمكن تقديرة بطريقة الامكا ن الاعظم وباستخدام التطبيقات المكررة مثل المكررات البسيطة أو طريقة نيوتن . رافسن التكرارية. وكذلك نقترح المقدر المتضمن التقديرين (تقدير الامكا ن الاعظم، والتقدير المقلص) للمعلمة β من خلال توفيق خطي بينهم.

1- المقدمة وهدف البحث

يعتبر توزيع ويبل احد التوزيعات المستمرة، واحد نماذج الفشل الشائعة الاستخدام، وفي السنوات الأربعين الماضية كان لتوزيع ويبل مكانة وأهمية في حقل المعولية(Reliability) واختبار الحياة (life testing). وقد اشتق توزيع ويبل من قبل تبيت فيشر (Tippett Fisher) عام 1928 كتوزيع ثالث تقريبي للقيم المتطرفة، وفي عام 1939 توصل العالم السويدي Waloddi Weibull إلى هذا التوزيع في تحليل قوة الكسر للأدوات، وبعد تطور البحوث العلمية وبحوث الفضاء أصبح توزيع ويبل مرافق لتلك التطورات فقد ساهم كثير من الباحثين في دراسة خصائص هذا التوزيع وبحث طرائق تقدير معلمات الشكل(β) ومعلمة القياس (θ) ومن هذه الطرائق طريقة الإمكان الأعظم والعزوم وطرق التقدير الخطي المستندة إلى مبدأ المربعات الصغرى، وطرق التقدير المستندة الى البيانات المبتورة (Censored Data)، ولسنا بصدد استعراض هذه الطرق، لاننا سنحاول الى طريقة جديدة في تقدير معلمة الشكل (β) وهي طريقة المقدر المقلص (Shrinkage Estimator)[6] والبحث عن هذا المقدر في المجال الذي يحتوي بيانات الفشل وفي ظل البيانات المبتورة (Censored Sampling).

يهدف البحث في تقدير معلمة الشكل (β) في توزيع ويبل ذي المعلمين (β،θ)، والبحث عن مقدر مقلص لمعلمة الشكل (β) في حالة وجود تخمين أولي لمجال يحتوي على المعلمة β، وسوف يتم البحث عن مقدر يملك اصغر متوسط مربعات خطأ ممكن (MMSE) Minimum Mean Squared Error، وسيتم أيضا تحديد مقياس للكفاءة النسبية للمقدر (Percent Relative Efficiency (PRE ومن ثم مقارنة المقدر المقلص مع مقدر الإمكان الأعظم

2- توزيع ويبل[1,3]

لتكن $X1, X2, \ldots, Xn$ تمثل عينة عشوائية حجمها n من توزيع ويبل ذي المعلمين (β،θ) والمعرف بالدالة الاحتمالية [1].

$$f(X,\theta,\beta) = \beta/\theta\, (X/\theta)^{\beta-1} e^{-(X/\theta)^{\beta}},\ x > 0\ ,\ \beta > 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

حيث ان β تمثل معلمة الشكل (shape parameter) وهي تحدد شكل التوزيع وهي موجبة , θ تمثل معلمة القياس (scale parameter) وهي ايضا موجبة وتسمى مميز الحياة (characteristic life).

ان الدالة التجميعية لتوزيع ويبل هي:

$$F(x) = 1 - \exp[-(x/\theta)]^{\beta},\ x \geq 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

والعزم الرائي لتوزيع ويبل هو (أنظر الملحق A).

$$M_r = \theta\Gamma(r / \beta + 1) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (3)$$

عندما $r = 1,2$ نحصل على العزمين الاول والثاني وهكذا:

$$M_1 = \theta\Gamma(1 / \beta + 1) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (4)$$

$$M_2 = \theta^2\,\Gamma(2/\beta + 1) \quad \text{.....} \quad (5)$$

ومنه نجد ان المتوسط والتباين لتوزيع ويبل ذو المعلمين هو :

$$Mean = \theta\Gamma(1/\beta + 1)$$

$$\sigma^2 = M_2 - (M_1)^2$$

$$= \theta^2\,[\Gamma(2/\beta + 1) - (\Gamma(1/\beta + 1)^2\,] \quad \text{.....} \quad (6)$$

وان الانحراف المعياري هو

$$\sigma = \theta[\,\Gamma(2/\beta + 1) - (\Gamma(1/\beta + 1))^2]^{1/2} \quad \text{.....} \quad (7)$$

اضافة لذلك تكون معولية توزيع ويبل ذو المعلمين هي:

$$R(x) = \exp\,[-(x/\theta)^{\beta}] \quad \text{.....} \quad (8)$$

ومئوية ويبل 100^{th} هي:

$$p = \theta[-\ln(1-p)\,]^{1/\beta} \quad \text{.....} \quad (9)$$

3– طرق تقدير معلمتي توزيع ويبل

سنتاول فيمايلي كلا من طريقةالامكان الاعظم Maximum Likelihood Method (M.L.E) وطريقة المقدرات المقلصة في تقدير معالم توزيع ويبل.

1–3 طريقة الامكان ألاعظم (M.L.E.)

تهدف طريقة (M.L.E) الى جعل دالة الامكان الاعظم للمتغيرات العشوائية اعظم مايمكن ، وتمتلك مقدرات هذه الطريقة خصائص جيدةوتكون اكثر دقة من الطرائق الاخرى خصوصا عند زيادة حجم العينة.

اذا كان المتغير العشوائي X له دالة كثافة احتمالية كما في المعادلة(1) فان دالة الامكان الاعظم للمتغيرات العشوائية المستقلة X1 ,X2, …, Xn هي:

$$L(X_1,X_2,\ldots,X_n,\beta,\theta) = \prod_{i=1}^{n}(\beta/\theta)(x_i/\theta)^{\beta-1}e^{-(xi/\theta)\beta}$$

$$= (\beta/\theta)^n \prod_{i=1}^{n}(x_i/\theta)^{\beta-1}\prod_{i=1}^{n}e^{-(xi/\theta)\beta} \quad \text{.......} \quad (10)$$

$$\ln L(X_1,X_2,\ldots,X_n,\beta,\theta) = n\ln\beta - n\ln\theta + (\beta-1)\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i/\theta) - \sum_{i=1}^{n}(x_i/\theta)^{\beta}$$

وبعد الاشتقاق بالنسبة لـ (θ ، β) ومساواة المشتقة مع الصفر نحصل على مقدري الامكان الاعظم وحسب المعادلتين:

$$n/\hat{\beta} - n(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\hat{\beta}}\ln x_i / \sum_{i=1}^{n} x_i^{\hat{\beta}}) + \sum_{i=1}^{n}\ln x_i = 0 \quad \text{.....} \quad (11)$$

$$\hat{\theta} = (\sum_{i=1}^{n} x_i^{\hat{\beta}}/n)^{1/\hat{\beta}} = \Sigma x_i/n^{1/\hat{\beta}} \quad \text{.....} \quad (12)$$

ويمكن تطبيق طريقة نيوتن رافسن التكرارية[4] وهي احدى الطرق العددية لحل المعادلة (11) والحصول على قيمة $\hat{\beta}$ وحسب المعادلة التالية:

$$\hat{\beta}_{j+1} = \hat{\beta}_j - g(\hat{\beta}_j)/g'(\hat{\beta}_j) \quad \text{.....} \quad (13)$$

وبالامكان الحصول على مصفوفة التباين والتباين المشترك لتوزيع ويبل ذي المعلمين عن طريق معكوس مصفوفة المعلومات لفيشر وهي:

$$F^{-1} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\partial^2 \ln L}{\partial\theta^2} & -\dfrac{\partial^2 \ln L}{\partial\theta\partial\beta} \\ -\dfrac{\partial^2 \ln L}{\partial\theta\partial\beta} & -\dfrac{\partial^2 \ln L}{\partial\beta^2} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} var(\hat{\theta}) & cov(\hat{\theta},\hat{\beta}) \\ cov(\hat{\theta},\hat{\beta}) & var(\hat{\beta}) \end{bmatrix}$$

2–3 اسلوب التقديرات المقلصة

Shrinkage Technique of Estimation[5,6,7]

بدأ البحث في تقدير معالم توزيع ويبل بطريقة المقدرات المقلصة منذ عام 1970، عند ازدياد اهتمام الباحثين في تحليل بيانات الفشل واجراء اختبارات الحياة للوحدات المنتجة، وقد كان البحث عن الطرائق التي تعطي اقل متوسط مربعات خطأ ممكن هو ثمرة للجهود العلمية المتواصلة في حقل التقديرات، لقد نوقش المقدر المقلص لمعلمة الشكل لتوزيع ويبل من باحثين مختلفين مثل Singh, Pandaey (1983) & Bhatkulikar (1986) , Pandaey & Upadhgay (1985), وكذلك Singh & Shukla (2000). وفي بحثنا هذا من المرغوب فيه تقدير المعلمة β بتوفر معلومات اولية في صيغة المجال (β_1, β_2)، والذي يتضمن قيمة المعلمة β , ولكن قبل البحث في المقدر للمعلمة β ضمن المعلومات في المجال الذي يحتوي (β_1, β_2)، نرى اولا من الضروري الاستفادة من العلاقة الوثيقة بين توزيع ويبل ذي المعلمين مع توزيع القيمة المتطرفة ذي المعلمين اومايسمى (logweibull distribution). حيث من المعلوم انه اذا كان:

$$Y = \ln x \sim \text{extreme value}$$

$$\Rightarrow Y = \ln x \sim \text{extreme value}$$

بدالةاحتمالية تجميعية هي:

$$F(y) = 1 - \exp\{-\exp(y-u/b)\},\ -\infty<y<\infty,\ b>0$$

.... (14)

حيث أن $u = \ln\theta$, $b = 1 / \beta$.

وقد اقترح Bain[2] عام (1972) صنفا من المقدرات الخطية لعينة حجمها m من الاحصاءات المرتبة من توزيع ويبل للمعلمة b والمقدر هو:

$$\hat{b}\, g = -\sum_{i=1}^{m-1} \{yi - ym / n\, k\, (m,n)\} \quad .... (15)$$

حيث ان $k\,(m, n)$ ثابت عدم التحيز ويساوي

$$k(m,n) = -1 / n\, E \sum_{i=1}^{m-1} (vi - vm) \quad .... (16)$$

وان $vi = yi - u / b$ هو متغير مرتب من توزيع القيمة المتطرفة عندما $u = 0$ ، $b = 1$.

واقترح Engelhardt & Bain[3] عام 1973 صنفا اخر من المقدرات الخطية لمعلمة الشكل لتوزيع القيمة المتطرفة هو

$$\hat{b}\, g = -\sum_{i=1}^{m} |yi - ym| / nk\,(g,m,n) \quad .... (17)$$

حيث g ثابت يتم اختياره بحيث يكون تباين $\hat{b}\, g$ اقل مايمكن، وان $k\ (g,m,n)$ ثابت عدم التحيز ايضا. لنفرض الان الاحصاءة T.

$$T = h\, \hat{b}\, g / b$$

فان T تتبع توزيع χ^2 بدرجة حرية h، حيث ان:

$$h = 2 / var(\hat{b}\, g / b)$$

ومن هذه المعلومات المتعلقة بالمقدر $\hat{b}\ g$ تمكن الباحث Bain ايضا من ايجاد مقدرا اخرا غير متحيزا لمعلمة الشكل β لتوزيع ويبل ذي المعلمتين وهو:

$$\hat{\beta} = h - 2 / t$$

وبتباين:

$$V(\hat{\beta}) = 2\beta^2 / h - 4$$

وان $(t = h\hat{b}g)$ لها دالة كثافة احتمالية هي:

$$FT(t) = (\beta/2)^{h/2}/\Gamma(h/2)t^{(h/2)-1}e^{-\beta t/2},\ t > 0 .... (18)$$

ويمكننا اثبات ان:

$$E(\hat{\beta}) = (h-2)E(1/t)\beta$$

$$V(\hat{\beta}) = V\,(h - 2/t)$$
$$= 2\beta^2/h - 4$$

اما المقدر الذي يملك اقل متوسط مربعات الخطأ (MMSE) للمعلمة β من بين كل المقدرات $C\hat{\beta}$ حيث C ثابت يجعل مجموع مربعات الخطأ اقل مايمكن هو المقدر m $\hat{\beta}$ والذي يساوي:

$$\hat{\beta}\, m = h - 2/t \text{ with RMSE } \{\hat{\beta}\, m\} = 2/h - 2$$

وبالنسبة لموضوع بحثنا هذا ، فقد اخذنا المقدر $\hat{\beta}\ m$ بنظر الاعتبار عند دراسة اصناف من المقدرات المقلصة باتجاه نقطة الاصل (P_0) أو باتجاه المجال $[\beta_1,\ \beta_2]$ الذي يحتوي على المعلمة β.

وارتاينا تكوين مقدرات مقلصة جديدة من الصنف:

$$[P\hat{\beta}_m + (1-p)(\beta_1 + \beta_2/2)] \text{ or } [p\hat{\beta}_m + (1-p)P_0]$$

ولكن بدلا من النسبه P ، $0 \le P \le 1$ ، ارتأينا استخدام معلومات اولية نرمز لها $w(P)$ لكي تكون معامل الترجيح للمقدر المقلص $\hat{\beta}_{(p,q)}$ لمعلمة الشكل β في توزيع ويبل وهذا المقدر الجديد معرف في المعادلة (19) وان هذا المقدر غير متحيز عندما $w(P) = 1$ ومتحيز عندما $w(P) \neq 1$ ، ولكنه مع ذلك يملك اقل متوسط مربعات خطأ ممكن والمقدر هو:

$$\hat{\beta}_{(p,\,q)} = (h - 2/t)w(P) + q(\beta_1 + \beta_2/2)\,(1 - w(P)) \quad .... (19)$$

ومن خصائص هذا المقدر مايلي:

1. أذا كانت $w(P) = 1$ فان المقدر المقلص يتحول الى المقدر غير المتحيز $\hat{\beta}\ m = h - 2/t$ وهو مقدر غير متحيز لان:

$$E(\hat{\beta}) = E(h - 2/t)$$
$$= E(h-2)E(1/t)$$
$$= (h-2)\int_0^{\infty} 1/t\, f(t)\, dt$$
$$= (h-2)\int_0^{\infty} (1/t)(1/\Gamma(h/2)\,(\beta/2)^{h/2}e^{-\beta t/2}\, t^{(h/2)-1}\, dt$$

$$E(\hat{\beta}) = ((\beta/2)\,(h-2)) / \Gamma(h/2))\,\Gamma((h/2)-1)$$
$$= ((\beta/2)\,(h-2))\,\Gamma((h/2)-1) / ((h/2)-1)\,\Gamma((h/2)-1)\beta$$

2. اذا كان $w(P) \neq 1$ فان المقدر المقلص في المعادلة (19) متحيز ومقدار التحيز Bias هو:

$$\text{Bias}\,\{\hat{\beta}\,(p,q)\} = \beta\{q\,\Delta - 1\}(1 - w\,(P)) \quad ..... (20)$$

وقد تم التوصل الى مقدار التحيز هذا بتطبيق الخطوات التالية:

$$E(\hat{\beta}\,(p,q)) = \beta w(p) + q(\beta 1 + \beta 2\,/2)\,(1 - w(P))$$

وبما ان التحيز هو التوقع للمعلمة فأن:

$$Bias = E(\hat{\beta}\,(p,q)) - \beta$$
$$\Delta = \beta 1 + \beta 2 / 2\,\beta$$
$$\therefore\ \beta 1 + \beta 2 = 2\,\beta\,\Delta$$
$$E(\hat{\beta}\,) = \beta w(p) + q\beta\,\Delta(1 - w(P))$$
$$= \beta w(p) + q\beta\,\Delta - \beta\,q\,\Delta\,w(p)$$
$$Bias = \beta w(p) + q\beta\,\Delta - \beta\,q\,\Delta\,w(p) - \beta$$

التوقع – المعلمة

$$Bias\,\{\hat{\beta}_{\ (p,q)}\} = \beta\{q\,\Delta - 1\}\,(1 - w(P))$$
$$E(\hat{\beta}_{\ (p,\ q)}) = (h - 2)(w(P))E(1/t) + q(\beta_1 + \beta_2 / 2)\,(1 - w(P))$$
$$E(1/t) = \int_0^{\infty} (1/t)\,f(t)dt$$
$$= \int_0^{\infty} (1/t)(1/\Gamma(h/2)\,(\beta/2)^{h/2}\,e^{-\beta t/2}t^{(h/2)-1}\,dt$$
$$= (\beta/)^{h/2}/\Gamma(h/2)\int_0^{\infty} (t)^{\,(h/2)-2}\,e^{-\beta t/2}\,dt$$
$$= (\beta/2)/\Gamma(h/2))(1/(\beta/2)^{(h/2)-1})\int_0^{\infty} (\beta t/2)^{(h/2)-2}\,e^{-\beta t/2}\,d(t\beta/2)$$
$$(\beta/2)/((h/2)-1 = 1/\Gamma(h/2))(\beta/2)\Gamma((h/2) - 1)$$
$$E(\hat{\beta}_{\,(p,\ q)}) = (h - 2)(w(P))\,((\beta/2) / (h - 2/\,2)) + q((\beta_1+\beta_2)\,/2)\,(1 - w(P))$$

ونعود الان الى اكمال الخصائص الاخرى للمقدر المقلص حيث بالرغم من انه متحيز وان مقدار التحيز هو المعادلة (20) وان مقدار التحيز النسبي المطلق هو المعادلة (21) (Absolute Relative Bias) (ARB) فهو:

$$ARB\{\hat{\beta}_{\,(p,\ q)}\} = |(q\Delta - 1)\,(1 - w(P))| \ldots\ldots\ldots (21)$$

ولكن بالرغم من ذلك التحيز للمقد المقلص لكنه يملك اقل متوسط مربعات الخطأ , وهذه الخاصية مهمة جدا بالنسبة للمقدرات (MSE).

$$MSE\,\{\hat{\beta}_{\,(p,\ q)}\} = \beta^2[(q\Delta - 1)^2\,(1 - w(P))^2 + 2(w(P))^2 / h - 4] \ldots\ldots\ldots\ldots. (22)$$

اما متوسط مربعات الخطأ النسبي للمقدر المقلص (RMSE) فهو:

$$RMSE\,\{\hat{\beta}\,(p,\ q)\,\} = (q\Delta - 1)^2\,[(1 - w(P))^2 + 2(w(P))^2 / h - 4] \ldots.. (23)$$

وتتحقق اقل قيمة لـ RMSE عندما $q = \Delta^{-1}$.

ومن المعلوم ان الكمية Δ تمثل معدل الانحراف في نقاط المجال الاصلية $\beta 1$ ، $\beta 2$عن القيمة الحقيقية للمعلمة β، او من الصعوبة في الحالات التطبيقية تخمين قيمة Δ، ولكن هناك تقدير غير متحيز لها مقترح وهو:

$$\hat{\Delta}\ = \{t(\beta_1 + \beta_2) / 4\}\{\Gamma(h/2) /\Gamma((h/2) +1)\}$$

وعليه تكون:

$$q = \hat{\Delta}^{-1}$$
$$= \{4 / t(\beta_1 + \beta_2)\}\ \{\Gamma((h/2) + 1) /\Gamma(h/2)\}$$

واخيرا لتقييم كفاءة المقدر المقترح $\hat{\beta}\,(p,\ q)$ مع المقدر $\hat{\beta}\,m$ ، تم حساب مقياس للكفاءة النسبية (Percent Relative Efficiencies) للمقدر $\hat{\beta}\,(p,\ q)$ (PREs) مقارنة مع $\hat{\beta}\,m$ ووجد انه يساوي:

$$PRE\,\{\hat{\beta}\,(p,q),\ \hat{\beta}\,m\,\} = 2(h - 4)/h - 2\{(q\Delta - 1)^2\,(1 - w(P))^2\,(h - 4) + 2(w(P))^2\}$$

بعد ان تم عرض طرائق تقدير معلمة الشكل β لتوزيع ويبل ذي المعلمين (β ، θ) ، مثل مقدر الامكان الاعظم والمقدر غير المتحيز $\hat{\beta}\,m$ والذي هو حالة خاصة من المقدر الخطي لمعلمة الشكل لتوزيع ويبل والذي اقترحه الباحثان Engelhard & Bain (1973) وكذلك المقدر المقلص $\hat{\beta}\,(p, q)$ نقترح مقدر جديد يمثل تركيب خطي من المقدر غير المتحيز $\hat{\beta}\,m$ والمقدر المقلص ، ويعمل هذا المقدر الجديد المقترح على جعل متوسط المربعات اقل مايمكن Minimum Mean Square وسوف نرمز له بالرمز β^* وهو تركيب خطي من المقدر المقلص والذي سنرمز له β^*_1 والمقدر غير المتحيز $\hat{\beta}\,m = \beta^*_2$ للسهولة فقط وفيما يلي توضيح للمقدر الخطي المقترح:

نفرض$\hat{\beta}\,(p, q) = \beta^*_1$ (المقدر المقلص)

وان $\hat{\beta}\,m = \beta^*_2$ (المقدر غير المتحيز)

وهذه الافتراضات للسهولة فقط.

ان المقدر المقترح المشترك والذي يمثل التركيب الخطي من المقدرين β^*_1، β^*_2 هو β^* والذي سوف يعرف بـ:

$$\beta^* = p\beta^*_1 + (1- p)\,\beta^*_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. (24)$$

ونحن بصدد ايجاد قيمة p التي تجعل متوسط مربعات الخطأ لـ β^* اقل مايمكن وكالاتي:

$$\beta^* - \beta = p\beta^*_1 + (1 - p)\,\beta^*_2 - \beta$$

وباضافة وطرح $p\beta$:

$$\beta^* - \beta = p\beta^*_1 + (1 - p)\,\beta^*_2 - \beta - p\beta + p\beta$$
$$\beta^* - \beta = p(\beta^*_1 - \beta) + (1 - p)\,(\beta^*_2 - \beta)$$

$$(\beta^* - \beta) = p^2E(\beta^*_1 - \beta)^2 + (1-p)^2E(\beta^*_2 - \beta)^2 + 2p(1-p)E[(\beta^*_1-\beta)(\beta^*_2-\beta)]\ E$$

$$MSE(\beta^*) = p^2\ MSE(\beta^*_1) + (1-p)^2\ MSE(\beta^*_2) + 2p(1-p)E[(\beta^*_1-\beta)(\beta^*_2-\beta)] \ldots (25)$$

$$\partial\ MSE(\beta^*)/\partial p = 2pMSE(\beta^{*1}) + 2(1-p)(-1)\ MSE(\beta^{*2}) + (2-4p)\ [E(\beta^{*1}\beta^{*2}) - E(\beta^{*1}\beta) - E(\beta\beta^{*2}) + E\beta^2]$$

عندما نجعل $\partial\ MSE(\beta^*)/\partial p = 0$ نجد ان:

$$P = MSE(\beta^*_2) - E(\beta^*_1\beta^*_2) + E(\beta^*_1\beta) + E(\beta\beta^*_2) - E\beta^2/MSE(\beta^*_1) + MSE(\beta^*_2) - 2E(\beta^*_1\beta^*_2) + 2E(\beta^*_1\beta) + 2E(\beta\beta^*_2) - 2E\beta^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (26)$$

من هذه المعادلة يمكن ايجاد قيمة p التي تجعل متوسط مربعات الخطأ للمركبة الخطية من المقدرين β^*_1 (المقدر المقلص) و β^*_2 (المقدر غير المتحيز) اقل مايمكن ، حيث ان $\beta^{*\,-1}_1$, β^*_2 مستقلان، وان:

$$E(\beta^*_1) = \beta w(p) + q(\beta_1 + \beta_2/2)(1 - w(p))$$

$$E(\beta^*_2) = \beta$$

وكذلك يكون:

$$E(\beta^*_1 . \beta^*_2) = E(\beta^*_1).\ E(\beta^*_2)$$

$$E(\beta .\ \beta^*_2) = \beta\ E(\beta^*_1) = \beta.\beta = \beta^2$$

في هذه الحالة يمكن تبسيط قيمة p من المعادلة (26) الى القيمة التالية:

$$P = MSE\ \beta^*_2) - E(\beta^*_1\beta^*_2) + E(\beta^*_1\beta)\ /MSE(\beta^*_1) + MSE(\beta^*_2) - 2E(\beta^*_1\beta^*_2) + 2E(\beta^*_1\beta)$$

(متحيز) $E(\beta^*_1) = \beta w(p) + \beta\Delta q(1 - w(p))$

(غير متحيز) $E(\beta^*_2) = \beta$

4- الاستنتاجات

1) ان المقدر المقلص لتقدير المعلمة β هو متحيز مقارنة بالمقدرات الاخرى ولكنه مع ذلك يملك اقل متوسط مربعات الخطأ وهذه صفة مهمة جدا بالنسبة للمقدرات.
2) تحققت اقل قيمة لمتوسط مربعات الخطأ النسبي للمقدر المقلص عندما $q = \Delta^{-1}$.
3) تم تكوين مقترح مشترك من التركيب الخطي للمقدرين β^*_1،β^*_2 وسمي هذا المقدرالمقترح β^* وتم اشتقاقه في المعادلات 26 ,25 ,24 وحصلنا على قيمة p التي تجعل متوسط مربعات الخطأ للمركبة الخطية من المقدرين β^*_1 (مقدر مقلص)، β^*_2 (مقدر غير متحيز) اقل مايمكن.

5- التوصيات

1) نوصي باستخدام المقدر المقترح لانه يعمل على تصغير متوسط مربعات الخطأ التجريبي.
2) نوصي باعتماد متوسط مربعات الخطأ النسبي عند المقارنة بين طرائق التقدير لمعلمة الشكل β وتوزيع ويبل ذي المعلمتين لانه يجرد البيانات من الوحدات.
3) نوصي باستخدام مقدر خطي جديد بشكل تركيبة خطية من ثلاث مقدرات وهو مانأمل بحثه في بحوث مستقبلية.

ملحق (A)

اشتقاق العزم الرائي لتوزيع ويبل ذي المعلمين وكالاتي.

$$E(x)^r = \int_0^\infty x^r f(x)\,dx$$

$$= \int_0^\infty x^r (\beta/\theta)(x/\beta)^{\beta-1} e^{-(X/\theta)^\beta} dx$$

Let $y = (x/\theta)^\beta \quad \therefore\ x/\theta = y^{1/\beta}$

$\therefore\ x = \theta y^{1/\beta} \Rightarrow dx = \theta(1/\beta)\, y^{(1/\beta)-1}\, dy$

$$M_r = (\beta/\theta)\int_0^\infty (\theta y^{1/\beta})^r (y^{1/\beta})^{\beta-1} e^{-y}\, \theta(1/\beta)\, y^{(1/\beta)-1}\, dy$$

$$M_r = \theta\,\Gamma(r/\beta + 1)$$

6- المصادر

[1] سلمان، د. ضوية "ايجاد الكفاءة النسبية المئوية لمعلمة الشكل لتوزيع ويبل"، منشور في مجلة العلوم الادارية والاقتصادية، مجلد 14، ع 49، 2008.

[2] BAIN, L. J. (1972): Inferences basal on Censored Sampling Form the Weibull or Extreme–Value distribution, Technamtrics, 14, 693-703.

[3] ENGELHARDT, M, and BAIN, L. J. (1973): Some Complete and Censored Sampling Results for the Weibull or Extreme-Value distribution Technometrics 15,541-549.

[4] MANN, N. R. (1968B): Point and Interval Estimation for the Two- Parameter Weibull and Extreme-Value distribution Techno- metrics 10, 231-256.

[5] PANDAEY, M. and UPADHYAY, S.K. (1985): Bayesian Shrinkage estimation of Weibull parameters, IEEE Transaction on Reliability, R-34,491-494

[6] SINGH, H.P. and SHUKLA, S.K. (2000): Estimation in the Two –Parameter Weibull distribution with prior information, IAPQR Transaction, 25,2,107-118
[7] THOMPSON, J.R. (1968): Some Shrinkage Techniques for Estimating the Mean, JASA, 63,113-123.

Abstract

The research leading to the estimator for shape parameter β in failure censored samples from two parameter Weibull distribution, when a prior information contains a guess interval containing the parameter β.In this paper we recognized two estimators for parameter β. The first is of type linear estimator and the other is Shrinkage estimator, with comparison between them using Minimum mean square error (MMSE) and percent Relative efficiency. The scale parameter θ can be estimated by M.I.E using any iterative approach such as, simple Iteration or Newton-Raphson method, Also we propose an estimator combining both MLE and Shrinkage estimator for parameter β, by using a linear combination of them.